УДК 517.518.8

Об одном методе решения уравнения теплопроводности неоднородного изотропного тела

Сергей Азарян

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.1-8

Ключевые слова: *коэффициент внутренней теплопроводности, классические задачи, задача Коши, метод малого параметра, дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, функция неоднородности*

Введение

Классические задачи в различных постановках решены многими авторами для изотропных однородных тел в теории упругости и такие краевые задачи привелись к решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1-3; 5].

В работе рассматривается задача теплопроводности неоднородного изотропного тела, которая приводит к решению дифференциального уравнения частным и производными второго порядка с переменными коэффициентами $\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K\frac{\partial u}{\partial z}\right]++F(x,y,z,t)$.

Вводится малый физический параметр и для задачи Коши получается рекуррентная последовательность краевых задач, при решении которых общее решение представляется в виде $u(x,t)=e^{-\mathrm{a}^2q^2t}\cdot sin(qx+h)+\frac{\delta}{2(1-\delta\sigma)}U(x,t)$. При вариации малого физического параметра δ и постоянного σ множество неоднороднодных изотропных тел для оптимального сравнения результатов с однородными телами [4, 47-52; 6, 165-240; 7, 165-240; 8, 4520-468; 9, 165-240].

1. Уражнение теплопроводности неоднородного изотропного тела.

Рассматривается неоднородное изотропное тело, где через $u(x,y,z,t)$ обозначается температура в точке $M(x,y,z,t)$, ограниченной поверхностью S в момент времени t. Известно, что количество тепла dQ поглощаемое теплом за время dt, равно

$$dQ=K\cdot\frac{\partial u}{\partial N}dSdt, \tag{1.1}$$

где ds-элемент поверхности, $K(x,y,z)$ – коэффициент внутренней теплопроводности, $\frac{\partial u}{\partial N}$ – производная функции $u(M,t)$ по внешней нормали к поверхности S. Так как тепло протекает в направлении понижения температуры, то

$dQ > 0$, если $\frac{\partial u}{\partial N} > 0$, и $dQ < 0$, если $\frac{\partial u}{\partial N} < 0$. Когда теловой баланс меняется в объеме тела в интервале времени (t_1, t_2), то из (1.1) получаем

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_s K(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial N} dS. \qquad (1.2)$$

Рассматривается элемент Δv из неоднородного изотропного тела V, для изменения температуры которого от $u(x,y,z,t_1)$ до $u(x,y,z,t_1)$ необходимо количество тепла Q_2, т.е.

$$Q_2 = \iiint_v [u(x,y,z,t_1) - u(x,y,z,t_1)]\, \gamma\rho dv = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_v \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv,$$

где $\gamma = \gamma(x,y,z)$ – коэффициент теплоемкости, $\rho = \rho(x,y,z)$ – плотность тела [1-4].

Предположим, в рассматриваемом теле имеются источники тепла с плотностью $F(x,y,z,t)$, тогда в интервале времени (t_1, t_2) будем иметь

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_v F(x,y,z,t)\, dv.$$

Так как известно, что $Q_2 = Q_1 + Q_3$, то получим уравнение теплопроводности для неоднородного изотропного тела в виде

$$\gamma(x,y,z)\rho(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(K(x,y,z)\mathrm{grad}\, u) - F(x,y,z,t) = 0$$

или

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K \frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K \frac{\partial u}{\partial z}\right] + F(x,y,z,t). \qquad (1.3)$$

2. Метод малого параметра. Рассматривается случай, когда $[5-8]$

$$\begin{cases} \gamma(x,y,z) = \gamma_0 \cdot \mathrm{e}^{\delta f(x,y,z)} \\ \rho(x,y,z) = \rho_0 \cdot \mathrm{e}^{\delta f(x,y,z)}; \\ K(x,y,z) = K_0 \cdot \mathrm{e}^{\delta f(x,y,z)} \end{cases} \qquad (2.1)$$

где $f(x,y,z)$ – функция неоднородности, δ $(0 < \delta < 1)$ – малый физический параметр, а γ_0, ρ_0, K_0 – параметры однородного тела.

С учётом (2.1), представим $u(x,y,z,t)$ в виде

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,z,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n u_n(x,y,z,t). \qquad (2.2)$$

Подставляя (2.2) с учетом (2.1) в (1.3), получим следующую систему рекуррентных уравнений

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \mathrm{a}^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right) + F(x, y, z, t), \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \mathrm{a}^2\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\right) + F_n(x, y, z, t), (n \geq 1), \qquad (2.4)$$

где $u_0(x, y, z, t)$ – решение уравнения (2.3) однородного изотропного тела, $F_n(x, y, z, t)$ – имеет следующий вид

$$F_n(x, y, z, t) = \mathrm{a}^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial z}\right); \; \mathrm{a}^2 = \frac{K_0}{\gamma_0 \rho_0}. \qquad (2.5)$$

3. Задача Коши. Найти $u(x,t) \in \{C^2(R_+^2) \cap C(\bar{R}_+^2)\}$, которая является решением уравнения

$$\gamma(x,t)\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + F(x,t) \qquad (3.1)$$

удовлетворяет начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad (3.2)$$

где $\varphi(x)$- непрерывная замкнутая функция в R^1.

Эти задачи (2.3), (2.4) с учетом начального условия (3.2), сводятся к следующей рекуррентной последовательности краевых задач $[5 - 8]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \mathrm{a}^2 \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + F(x,t), \\ \quad u_0(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \qquad (3.3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} = \mathrm{a}^2 \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + F_n(x,t), \\ \quad u_n(x, 0) = 0, \end{cases} (n \geq 1). \qquad (3.4)$$

Известно, что решение краевой задачи(3.3) для однородного изотропного тела, когда $F(x,t) = 0$, имеет следующий вид

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\mathrm{a}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4\mathrm{a}^2 t}}d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\mathrm{a}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\eta + x)e^{-\frac{\eta^2}{4\mathrm{a}^2 t}}d\eta, \qquad (3.5)$$

где $\eta = \xi - x$, отсюда $\xi = \eta + x;\; d\xi = d\eta$

Решение краевой задачи (3.3) ищем в виде

$$u_n(x,t) = u_n^{(o)}(x,t) + u_n^{(ч)}(x,t), \tag{3.6}$$

где $u_n^{(o)}(x,t)$ – общее решение краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n^{(o)}}{\partial t} = \text{a}^2 \dfrac{\partial^2 u_n^{(o)}}{\partial x^2}, \\ u_n^{(o)}(x,0) = \varphi_n(x), \end{cases} \tag{3.7}$$

и $u_n^{(ч)}(x,t)$ – частное решение (3.3), которая выражается формулой

$$u_n^{(ч)}(x,t) \equiv -F_n(x,t) = -\text{a}^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}; \tag{3.8}$$

а функция $\varphi_n(x)$ с учетом начального условия (3.3), будет представлятся так

$\varphi_n(x) = -u_n^{(ч)}(x,0).$ (3.9) Аналогичным образом, как при случае однородного изотропного тела, с учетом (3.4) – (3.8), решение краевой задачи(3.3) можно представить в виде

$$u_n(x,t) = u_n^{(ч)}(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\text{a}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\text{a}^2 t}} d\xi. \tag{3.10}$$

Следовательно, с учетом (3.5) и (3.10), решение (3.1) будет

$$\begin{gathered} u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\text{a}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\text{a}^2 t}} d\xi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \left\{ u_n^{(ч)}(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\text{a}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\text{a}^2 t}} d\xi \right\}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

а). Теперь, после определения $u(x,t)$, с учетом (3.8), если известны $u_n^{(ч)}(x,t)$, можно поличить класс функций $f(x)$ из следующего интеграла

$$f(x) = -\frac{1}{\text{a}^2} \int_{\Gamma} u_n^{(ч)}(x,t) \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \right)^{-1} dx, (n \geq 1)$$

Не нарушая общности, можно взять случай, когда $n = 1$, и тогда получим функцию неоднородности $f(x)$, которая будет определяется формулой

$$f(x) = -\frac{1}{\text{a}^2} \int_{\Gamma} u_1^{(ч)}(x,t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^{-1} dx. \tag{3.12}$$

б) Если дана функция неоднородности $f(x)$, тогда можно определить частное решение $u_n^{(ч)}(x,t)$ из уравнения (3.8).

4. Пусть в задаче Коши функция $\varphi(x)$ представлена в виде

$$\varphi(x) = \sin(px^2 + qx + h), \tag{4.1}$$

и еще известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(A\tau^2+B\tau+C)} \sin(P\tau^2 + Q\tau + H)\,d\tau =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{A^2+P^2}} \mathrm{e}^{\frac{A(B^2-4AC)-(AQ^2-2BPQ+4CP^2)}{4(A^2+P^2)}} \cdot \left\{\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{P}{A} - \right.\right. \tag{4.2}$$

$$\left.\left. - \frac{P(Q^2-4PR)-(B^2P-2ABQ+4A^2H)}{4(A^2+P^2)}\right]\right\}, ReA > 0.$$

Тогда с учетом (4.1) и (4.2), из (3.5) получим

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2\mathrm{a}\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A\eta^2} \cdot \sin(P\eta^2 + Q\eta + H)\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{a}\sqrt{\pi t}\sqrt[4]{A^2+P^2}} \cdot e^{\frac{-AQ^2}{4(A^2+P^2)}} \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{P}{A} - \frac{PQ^2-4(A^2+P^2)H}{4(A^2+P^2)}\right]. \tag{4.3}$$

где

$$A = \frac{1}{4\mathrm{a}^2 t};\ P = p; Q = 2px + q; H = px^2 + qx + h$$

Не нарушая общности, пусть $P = 0$. Тогда функция $u_0(x,t)$ примет следующий вид

$$u_0(x,t) = e^{-\mathrm{a}^2q^2t} \cdot \sin(qx + h). \tag{4.4}$$

4.1. Для дальнейшего решения задачи предположим, что

$$u_n^{(ч)}(x,t) = \sigma^{n-1} u_1^{(ч)}(x,t). \tag{4.5}$$

σ-постоянная величина, а функция неоднородности имеет вид

$$f(x) = p_0 \sin(q_0 x + h_0). \tag{4.6}$$

Из (3.8), учитывая (4.4), получим

$$u_n^{(ч)}(x,t) = -\mathrm{a}^2 \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}.$$

Отсюда, с учетом (4.5) и (4.6), будем иметь

$$u_n^{(\text{ч})}(x,t) = -\lambda \cdot \sigma^{n-1} e^{-\mathrm{a}^2 q^2 t} \cdot \cos(qx+h)\cos(q_0 x + h_0),$$

или

$$u_n^{(\text{ч})}(x,t) = -\frac{\lambda}{2} \cdot \sigma^{n-1} e^{-\mathrm{a}^2 q^2 t} \cdot \sum_{k=1}^{2} \cos(q_k x + h_k), \tag{4.7}$$

где

$$\lambda = p_0 q_0 q \mathrm{a}^2;\ q_1 = q + q_0;\ h_1 = h - h_0;\ q_2 = q - q_0;\ h_2 = h + h_0. \tag{4.8}$$

Тогда в силу (4.7) из (3.9) получим, что

$$\varphi_n(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot \sigma^{n-1} \sum_{k=1}^{2} \cos(q_k x + h_k). \tag{4.9}$$

Следовательно, учитывая (4.9), из (3.10) будем иметь

$$u_n(x,t) = -\frac{\lambda}{2} \cdot \sigma^{n-1} \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{2} e^{-\mathrm{a}^2 q^2 t} \cos(q_k x + h_k) + \frac{1}{2\mathrm{a}\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4\mathrm{a}^2 t}} d\xi = \tag{4.10}$$
$$= \frac{\lambda}{2} \cdot \sigma^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{2} \left(-e^{-\mathrm{a}^2 q^2 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{a}^2 q_k^2 t}\right) \cdot \cos(q_k x + h_k).$$

Наконец, в силу (3.5), (3.11) и (4.10), решение краевой задачи Коши будет

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{\lambda}{2\sigma} \cdot U(x,t) \sum_{n=1}^{\infty} (\delta\sigma)^n, \tag{4.11}$$

где

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{a}^2 q_k^2 t} - e^{-\mathrm{a}^2 q^2 t}\right) \cdot \cos(q_k x + h_k). \tag{4.12}$$

4.2. Из (3.12) с учетом (4.4), для определения функции неоднородности $f(x)$ получим следующее дифференциальное уравнение [5 ÷ 8]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{e^{\mathrm{a}^2 q^2 t}}{q \mathrm{a}^2 \cos(qx+h)} u_1^{(\text{ч})}(x,t). \tag{4.13}$$

Предположим, 1 то при $(n = 1)$ задано частное решение (3.4) в виде

$$u_1^{(ч)}(x,t) = -D \cdot e^{\omega x - a^2 q^2 t} \cos^2(qx+h), (\omega; D = const). \qquad (4.14)$$

Тогда в силу (4.14), из (4.13) получим

$$f(x) = \frac{D}{qa^2} \int e^{\omega x} \cos(qx+h) \cdot dx + D_0, (D_0 = const). \qquad (4.15)$$

Вычислив вышеуказанный интеграл (4.15), будем иметь

$$f(x) = \frac{D}{qa^2} \cdot \frac{e^{\omega x}}{\omega^2 + q^2} [\omega \cos(qx+h) + q \sin(qx+h)] + D_0. \qquad (4.16)$$

При различных вариациях значений параметров D, D_0, q, h, ω получается целый класс функции неоднородности $f(x)$.

Теперь получим решение задачи Коши с учетом (4.14).

Из (4.5), в силу (4.14) будем иметь

$$\begin{cases} u_n^{(ч)}(x,t) = -\sigma^{n-1} D \cdot e^{\omega x - a^2 q^2 t} \cos^2(qx+h), \\ \varphi_n(x) = \sigma^{n-1} D \cdot e^{\omega x} \cos^2(qx+h). \end{cases} \qquad (4.17)$$

Следовательно, общее решение краевой задачи (3.4) с учетом (4.17), будет

$$u_n(x,t) = u_n^{(ч)}(x,t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= u_n^{(ч)}(x,t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(\eta + x) e^{-\frac{\eta^2}{4a^2 t}} d\xi$$

$$= -\sigma^{n-1} D \cdot e^{\omega x - a^2 q^2 t} \cos^2(qx+h) +$$

$$+ \frac{\sigma^{n-1} D}{4a\sqrt{\pi t}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2 t} + \omega\eta + \omega x} d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2(q\eta + qx + h) e^{-\frac{\eta^2}{4a^2 t} + \omega\eta + \omega x} d\eta \right\} =$$

$$= -\sigma^{n-1} D \cdot \left\{ e^{\omega x - a^2 q^2 t} \cos^2(qx+h) \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\omega(\omega a^2 t + x)}}{4} \left[1 + 2e^{-4q^2 a^2 t} \cdot \cos 2(\omega q a^2 t + qx + h) \right] \right\},$$

и тогда решение задачи Коши примет следующий вид

$$u(x,t) = e^{-a^2 q^2 t} \cdot \sin(qx+h) + \frac{1}{2\sigma} U(x,t) \sum_{n=1}^{\infty} (\delta\sigma)^n, \qquad (4.18)$$

где

$$U(x,t) = e^{\omega^2 a^2 t + \omega x} \{ 1 + e^{-4q^2 a^2 t} \cdot \cos[\omega q a^2 t + 2(x + 2h)] \}.$$

5. При решении задачи Коши в пунктах (**4.1.** и **4.2.**), убедились, что в (4.11) и (4.17) необходимо определить поведение ряда

$$S(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\delta\sigma)^{n-1}. \qquad (5.1)$$

При $\delta\sigma \neq 0$, то n-я частичная сумма ряда, есть сумма n членов геометрической прогрессии, т.е.

$$S_n = \frac{1-(\delta\sigma)^n}{1-\delta\sigma} = \frac{1}{1-\delta\sigma} - \frac{(\delta\sigma)^n}{1-q}. \qquad (5.2)$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) Пусть $|\delta\sigma| < 1$, тогда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\delta\sigma} - \frac{(\delta\sigma)^n}{1-\delta\sigma}\right) = \frac{1}{1-\delta\sigma}. \qquad (5.3)$$

Отсюда получается, что ряд (5.1) сходится.

б) Пусть $|\delta\sigma| \geq 1$, тогда ряд (5.1) расходится.

в) Пусть $|\delta\sigma| = -1$, тогда

$\mathrm{S_n} = \overbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \cdots - 1 + 1}^{\mathrm{n членов}}$. Отсюда следует, что $\mathrm{S_{2n}} = 0$; и $\mathrm{S_{2n+1}} = 1$.

Следовательно, предел по (5.3) не определен, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = ?.$$

и ряд (5.1) расходится.

Вывод. Для того, чтобы рад (5.1) сходился необходимо следующее условие

$$|\delta\sigma| < 1.$$

И тогда с учетом (5.3), решение задачи Коши (4.17)примет вид

$$u(x,t) = e^{-\mathrm{a}^2 q^2 t} \cdot sin(qx+h) + \frac{\delta}{2(1-\delta\sigma)} U(x,t). \qquad (5.4)$$

При вариации функции неоднородности $f(x,y,z)$ и малого физического параметра δ можно получить множество неоднородных изотропных тел, для которых решение краевой задачи Коши представляется по формуле (5.4).

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.1-8

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М., Наука, 1976, 512 с.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г.Ф. Методы теоретической физики, М., Том 1,1958, 931 с., Том 2, 1960, 865 с.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М, Наука, 1961, 400 с.
4. Саркисян В.С., Азарян С.А. Влияние анизотропии на напряженное состояние упругих тел с отверстиями. Учёные записки ЕГУ, Естественные науки, 3(160), 1985. с. 47-52.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М, Наука, 1972, 742 с.
6. Mamrilla J., Sarkisyan V.S., Ovsepyan L.O., Mamrillova A., Azaryan S.A. The concentration of strains in the inhomogeneous boundless this plate with the circuliaropening. Acta Phizica, Univ. Comen, XXVI, 1985. (Nektore problemy matematickej teorie pruznosti anizotropneho a nehomogenneho telesa. Univerzita Komenskeho. 1988. str.165-240).
7. Mamrillova A., Sarkisyan V.S., Azaryan S.A. The solution of the planer inhomogeneous problem for regions with the opening of the pure shear". Acta Phizica, Univ. Comen, XXVIII, 1985. (Nektore problemy matematickej teorie pruznosti anizotropneho a nehomogenneho telesa. Univerzita Komenskeho. 1988. str.165-240).
8. Mamrillova A., Azaryan S.A. New approach to the solution of problems of inhomogeneous thin plates a hole planar", Acta Phizica, Univ. Comen. XXIX, 1989. (Teoretichka mschanika.VSP. 1990. Bratislava, str. 452-468).
9. Sarkisyan V.S., Ovsepyan L.O., Mamrillova A., Azaryan S.A. Koncentracia naprjahenij okolo nekruplich otwerstij v neodnorodnich beskonecnych plastinkach. Yerevan, UcheniezapiskiEGU, No 2(156), 1984. (Nektore problemy matematickej teorie pruznosti anizotropneho a nehomogenneho telesa.Univerzita Komenskeho.1988. str. 165-240).

Անհամասեռ իզոտրոպ մարմնի ջերմահաղորդականության հավասարման լուծման մի մեթոդի մասին

Սերգեյ Ազարյան

Ամփոփում

Հանգուցային բառեր. *ներքին ջերմահաղորդականության գործակից, դասական խնդիրներ, Կոշիի խնդիր, փոքր ֆիզիկական պարամետրի մեթոդ, երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում, անհամասեռության ֆունկցիա*

Տարբեր ձևակերպումների դասական խնդիրները լուծվել են բազմաթիվ հեղինակների կողմից (Կոշի, Դիրիխլե, Նեյման և ուրիշներ) առաձգականության տեսության իզոտրոպ միատարր մարմինների համար, և նման սահմանային խնդիրները վերցվել են հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման նպատակով [1-3; 5]:

Աշխատանքում դիտարկվում է անհամասեռ իզոտրոպ մարմնի ջերմահաղորդման խնդիրը, որը հանգեցնում է փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի մասնակի դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը [1, 3]: Փոփոխական գործակիցների բավարար սահունությամբ, փոխակերպումների, ինչպես նաև բնորոշ հավասարման միջոցով այս երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը տվյալ տիրույթում կարող է կրճատվել հետևյալ ձևերից մեկով. էլիպսային, հիպերբոլիկ և պարաբոլիկ: Այստեղ սահմանային արժեքի խնդիրը կրճատվում է փոփոխական պարաբոլիկ գործակիցներով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը:

Անհամասեռ իզոտրոպ մարմնի Կոշիի եզրային խնդիրը δ փոքր ֆիզիկական պարամետրի ներդրման դեպքում բերվում է եզրային խնդիրների կրկնվող (ռեկուրենտ) հաջորդականության: Այս եզրային խնդիրները լուծելիս ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է (2.2) շարքի տեսքով և որոշակի պայմաններում՝ կախված δ-ից և σ-ից. ապացուցվում է տվյալ շարքի զուգամիտությունը, և լուծումը բերվում է (5.4) տեսքին: Անհամասեռության $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի, δ փոքր ֆիզիկական պարամետրի և σ հաստատունի վարիացիայի (փոփոխման) դեպքում ստացվում է անհամասեռ իզոտրոպ մարմինների բազմություն, որոնց արդյունքները կհամեմատվեն համասեռ իզոտրոպ մարմինների արդյունքների հետ:

On a Method of Solving the Thermal Conductivity Equation of an Inhomogeneous Isotropic Body

Sergey Azaryan

Summary

Key words: *coefficient of internal heat conductivity, classical problems, Cauchy problem, small parameter method, second-order partial differential equation, inhomogeneity function*

Classical problems in various formulations have been solved by many authors (Cauchy, Dirichle, Neumann and others) for isotropic homogeneous bodies in the theory of elasticity. Such boundary value problems have been reduced to solving differential equations with constant coefficients [1-3; 5].

The paper considers the problem of thermal conduction of an inhomogeneous isotropic body, which leads to the solution of a second-order partial differential equation with variable coefficients (1.3). With sufficient smoothness of the variable coefficients, through transformations, as well as the characteristic equation, this second-order differential equation in a given region can be reduced to one of the following forms; elliptic, hyperbolic and parabolic. Here, the boundary value problem is reduced to solving a second order differential equation with variable parabolic coefficients.

A small physical parameter is introduced, and a recurrent sequence of boundary value problems for the Cauchy boundary value problem is obtained in the article. When solving these boundary value problems, the general solution is represented as a series by formula (2.2) and under certain conditions depending on δ and σ the convergence of the series is proved and the solution is reduced to (5.4). In case of varying the inhomogeneity function $f(x,y,z)$, a small physical parameter δ and a constant σ, a set of inhomogeneous isotropic bodies is obtained, the results of which will be compared with the results of homogeneous isotrpic bodies.

Ներկայացվել է 25.03.2023 թ.
Գրախոսվել է 29.04.2023 թ.
Ընդունվել է տպագրության 25.05.2023 թ.